Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_{n+1}$

Comme $V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ d'où $l' = \dfrac{l+l'}{2} \Rightarrow l = l'$.

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

• pour $n = 0$: $U_0 \cdot V_0 = 1 \cdot 2 = 2$

• Supposons que pour un entier donné n on a : $U_n \cdot V_n = 2$ et montrons que $U_{n+1}V_{n+1} = 2$.

$$U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \cdot \frac{U_n+V_n}{2} = U_nV_n = 2.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

b) On a : $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$ donc $l^2 = 2$ et par suite $|l| = \sqrt{2}$

comme $l \geq 0$ donc $l = \sqrt{2}$.

Solution 8 :

1°/ • $$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (U_n) est croissante.

• $$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n!} = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!} \leq 0 \text{ pour } n \in \mathbf{N}^*.$$

On a $\forall n \geq 1$, $V_{n+1} - V_n \leq 0$ d'où $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

2°/ Soit $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

1er Cas :

Si $p \leq q \Rightarrow U_p \leq U_q$ (car (U_n) est croissante)